

УДК 53.023

МОДЕЛЬ РАЗВИТИЯ ПОВРЕЖДЕННОСТИ СТАЛИ ПРИ ЦИКЛИЧЕСКОМ НАГРУЖЕНИИ

Алексей Игоревич Болотников

*Студент 4 курса, бакалавриат,
кафедра «Физика»**Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана**Научный руководитель: В.П. Левин,
канд. физ.-мат. наук, доцент, преподаватель кафедры «Физика»*

Изучение закономерностей накопления и роста малых трещин в конструкционных материалах на стадии, предшествующей зарождению макротрещины, важно для обеспечения надежности материала элементов конструкций. Однако подобные исследования трудоемки, и потому работы, посвященные этой проблеме немногочисленны.

В статье [1] изучены закономерности накопления и роста плотности усталостных микротрещин длиной 40 мкм (1), 100 мкм (2), 300 мкм (3) в образцах из аустенитной стали 316L в зависимости от числа циклов нагружения. Установлено, что возникновению микротрещины каждого последующего среднего размера или ранга предшествует накопление дефектов предыдущего ранга, причем ускоренное развитие последующего ранга микротрещин начинается после снижения числа микротрещин предшествующего размера или достижения некоторого постоянного их числа. Так, развитие микротрещин второго ранга размером ~100 мкм начинается после резкого снижения числа дефектов первого ранга размером 40 мкм. А ускоренное развитие трещины третьего ранга длиной 300 мкм связано с достижением постоянного числа микротрещин второго ранга размером 100 мкм.

Подобный эффект противофазного изменения длин усталостных микротрещин был обнаружен и при анализе эволюции поврежденности цилиндрических образцов из малоуглеродистой стали, изученной методом реплик, которые снимали с поверхности образцов на различных стадиях разрушения [2].

Для описания наблюдаемой смены появления, роста и слияния микротрещин, обеспечивающей иерархическую структуру поврежденности, может быть использована известная модель Лотки - Вольтерры [3-5], первоначально предложенная для описания динамики взаимодействующих биологических популяций, а затем распространенная на многие другие конкурирующие процессы.

Модель Лотки - Вольтерры описывает взаимодействие двух видов популяций - хищников (численностью P) и жертв (численностью N). При отсутствии хищников, число жертв увеличивается по закону:

$$\frac{dN}{dt} = \alpha_1 N \quad (1)$$

где $\alpha_1 = \alpha_{1p} - \alpha_{1c}$, причем α_{1p} учитывает естественную рождаемость жертв, а α_{1c} — их естественную смертность. При благоприятных условиях существования жертв (наличии корма) $\alpha_1 > 0$, а число хищников, вследствие малого числа жертв в начале процесса сокращается, и скорость уменьшения их численности определяется соотношением:

$$\frac{dP}{dt} = -\alpha_2 P \quad (2)$$

Если на рассматриваемой территории сосуществуют хищники и жертвы, то с увеличением числа их столкновений количество жертв будет снижаться, причем вероятность столкновения хищника с жертвой будет пропорциональна произведению PN , а скорость уменьшения числа жертв - $\varepsilon_1 PN$. Тогда суммарная скорость изменения числа жертв будет определяться уравнением:

$$\frac{dN}{dt} = \alpha_1 N - \varepsilon_1 PN \quad (3)$$

Скорость увеличения числа хищников с учетом увеличения их рождаемости $\varepsilon_2 PN$, также принятой пропорциональной количеству столкновений с жертвами, будет равна:

$$\frac{dP}{dt} = \alpha_2 P - \varepsilon_2 PN \quad (4)$$

Обозначим отклонения от положения равновесия численности популяций как

$$n = N - N_0, \quad p = P - P_0 \quad (5)$$

Тогда для малых отклонений от положения равновесия получим:

$$\frac{dn}{dt} = -\varepsilon_1 N_0 p, \quad (6)$$

$$\frac{dp}{dt} = -\varepsilon_2 P_0 n \quad (7)$$

Дифференцируя уравнение (6) по параметру t и подставив в него выражение (7), получим для жертв:

$$\frac{d^2 n}{dt^2} + \omega_0^2 n = 0 \quad (8)$$

где $\omega = \sqrt{\alpha_1 \alpha_2}$. Для хищников уравнение отклонения численности от равновесного значения будет идентично:

$$\frac{d^2 p}{dt^2} + \omega_0^2 p = 0 \quad (9)$$

Используем уравнения (8) и (9) для описания динамики развития поврежденности, принимая микротрещины большой длины (больше двух размеров зерна) в качестве «хищников», а малые микротрещины (меньше двух размеров зерна) в качестве «жертв». Число больших трещин примем за p , малых - за n , а равновесное число микротрещин примем равным 0.

Для усталостного разрушения в качестве времени t используем относительное число циклов нагружения $\frac{N}{N_f}$.

Тогда, согласно модели и уравнениям (8), (9), число микротрещин будет меняться по следующим законам:

$$\frac{d^2 n}{d \frac{N}{N_f}^2} + \omega_1^2 n = 0, \quad \frac{d^2 p}{d \frac{N}{N_f}^2} + \omega_2^2 p = 0$$

Решение этих уравнений отвечает следующим соотношениям:

$$n = n_0 \cos \left(\omega_1 \frac{N}{N_f} + \varphi_1 \right), \quad p = p_0 \cos \left(\omega_2 \frac{N}{N_f} + \varphi_2 \right),$$

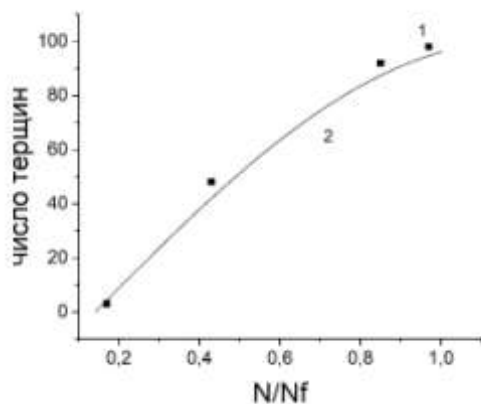
где n_0, ω_1, φ_1 и p_0, ω_2, φ_2 коэффициенты, зависящие от материала и условий испытаний.

Используем эти соотношения для описания развития поврежденности при циклическом нагружении. В качестве микротрещин малого размера примем микротрещины размером, меньшим 100 мкм (меньшим 2-3 размеров зерен) размеров зерен, а в качестве микротрещин большого размера примем микротрещины размером от 100 до 500 мкм.

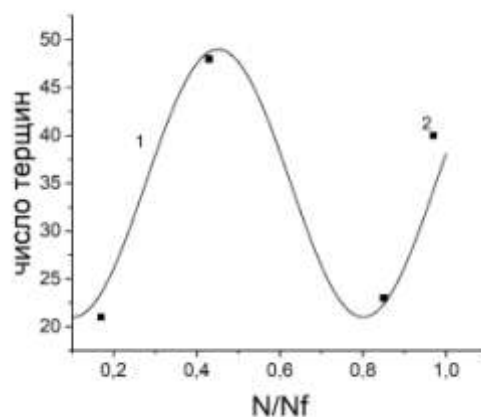
Для циклического нагружения малоуглеродистой стали [2] получили следующие решения:

$$n_2 = 35 + 14 * \cos(9 * \frac{N}{N_f} + 8,5) \quad (10)$$

$$n_1 = 100 \cos(1.5 \frac{N}{N_f} + 4,5) \quad (11)$$



а



б

Рис. 1. Сравнение расчетных по уравнениям (10), (11) зависимостей числа больших (а) и малых (б) микротрещин от относительной долговечности с экспериментальными данными, показанными точками

Как следует из рисунка 1, модель «хищник-жертва» удовлетворяет экспериментальным данным с достаточной точностью и это говорит о том, что развитие микротрещин, как и многие другие явления в природе, носит эволюционный характер.

Литература:

1. Magnin, T., Coudreuse, L., Lardon, J.M., 1985. A quantitative approach to fatigue damage evolution in FCC and BCC stainless steels. // Scriptametallurgica 19, 1487–1490.
2. Suh, C.M., Yuuki, R., Kitagawa, H., 1985. Fatigue microcracks in a low carbon steel. // Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures 8, 193–203.
3. Lotka, A.J., 1920. Analytical note on certain rhythmic relations in organic systems. // Proceedings of the National Academy of Sciences 6, 410–415
4. Lotka, A.J., 1925. Elements of physical biology. Williams and Wilkins. Baltimore, Md.
5. Volterra, V., 1926. Variations and fluctuations of the number of individuals in animal species living together. // Animal ecology 409–448.